Teoretická část - 28.6.2021

1. (a) Definujte obyčejnou diferenciální rovnici a řešení obyčejné diferenciální rovnice (2 body).

   (b) Zformulujte větu o řešení rovnice se separovanými proměnnými (2 body).

   (c) Zformulujte a dokažte větu o řešení lineární rovnice 1. řádu (3 body).

   (d) Nechť $\phi, \psi : (5, 9) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a nechť f a g jsou řešeními rovnice

   $$y' + \phi y = \psi$$

   na $(5, 9)$ splňujícími $f(8) = g(8)$. Za pomoci věty o řešení lineární rovnice 1. řádu dokažte, že $f = g$ na $(5, 9)$ (1 bod).

2. (a) Definujte mocninnou řadu (1 bod).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o derivaci mocninné řady (5 bodů).

   (c) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence 5. Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$, $x \in (-4, 6)$, má derivace všech řádů ve všech bodech intervalu $(-4, 6)$. Napište předpis pro $f^{(5)}(0)$ (2 body).

3. (a) Definujte parciální derivace (včetně derivací vyšších řádů), Hessovu matici a Taylorův polynom (nazapomeňte vysvětlit veškeré používané značení) $(3,5$ bodu).

   (b) Zformulujte větu o nutné podmínce pro extrém a větu o postačující podmínce pro extrém (2 body).

   (c) Pro funkci $f(x,y,z) = xy^2z^4$, $a = (1,1,2)$ a $n = 1,2,3,4$ napište koeficient u $(x-1)(z-2)^2$ polynomu $T^n_{f,a}$ (1 bod).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, a je-li T Taylorův polynom stupně 2 funkce f se středem v bodě $(1,1)$, potom $\nabla f(1,1) = \nabla T(1,1)$,

      ii. je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, a je-li T Taylorův polynom stupně 2 funkce f se středem v bodě $(1,1)$, potom $H_f(1,1) = H_T(1,1)$

      iii. je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, a je-li T Taylorův polynom stupně 2 funkce f se středem v bodě $(1,1)$, potom platí: má li f v bodě $(1,1)$ lokální minimum, potom má T v bodě $(1,1)$ lokální minimum.

   Vše řádně zdůvodněte $(1,5$ bodu).